

伽利略搜救信号关键参数估计的克拉美—罗界

王 堃, 吴嗣亮, 田 静

(北京理工大学雷达技术研究所, 北京 100081)

摘 要: 本文考虑信息位宽的不确定度, 研究了伽利略搜救信号信息位宽、到达频率(FOA)和到达时间(TOA)估计的克拉美—罗界(CRB). 首先推导了计算 Fisher 信息矩阵各元素的通用公式, 然后推导得到了伽利略搜救信号 Fisher 信息矩阵各元素的计算表达式. 具体计算时, 利用单位冲激函数的性质和 Parseval 定理, 将单位冲激函数的平方和转换到频域进行计算, 得到了信息位宽、FOA 和 TOA 估计的 CRB 的解析结果. 数值分析和 Monte Carlo 仿真结果表明, 该 CRB 具有有效性, 可以用于评估信息位宽、FOA 和 TOA 估计算法的性能.

关键词: 克拉美—罗界 (CRB); 信息位宽; FOA 和 TOA; 伽利略搜救信号

中图分类号: TN911.6 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2011) 12-2761-07

Cramer-Rao Bounds of Key Parameters Estimation for Galileo SAR Signal

WANG Kun, WU Si-liang, TIAN Jing

(Radar Research Laboratory, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: Considering the uncertainty of message bit width, the Cramer-Rao Bounds (CRBs) for the estimation of message bit width, frequency of arrival (FOA) and time of arrival (TOA) from Galileo search and rescue (SAR) signal were researched. General formula for calculating the elements of Fisher information matrix was derived first. Then the calculation expressions for the Fisher matrix elements of Galileo SAR signal were acquired. When calculating the sum of the square of Dirac delta function, the properties of Dirac delta function and Parseval's theorem were used to transform the computation from time-domain to frequency-domain. Then the closed-form analytical solutions of the CRBs for the estimation of message bit width, FOA and TOA were derived. Numerical calculation and Monte Carlo simulation results validate the effectiveness of the CRBs above which can be used to evaluate the performance of message bit width, FOA and TOA estimation algorithm.

Key words: Cramer-Rao Bound (CRB); message bit width; FOA and TOA; Galileo SAR signal

1 引言

伽利略搜救系统中^[1], 用户遇险时信标机发出求救信号, 星上系统将接收到的信标信号转发至地面站, 地面站完成对信标信号的检测、信标信息提取和定位, 并将结果报送至任务控制中心和地面救援中心^[2]. 伽利略搜救信号属于相位编码信号, 信标信息提取的本质是基于锁相环和位同步环的解调解码^[3], 因而必须先对未知的信息位宽(或称码元宽度)进行估计, 然后才能正确解调解码. 地面站对信标机的定位主要依靠对信标信号 FOA 和 TOA 的估计来完成, 因而 FOA 和 TOA 的估计精度决定了地面站对信标机位置定位的精度. 此外, TOA 的定义与信息位宽有关^[4], 信息位宽的估计精度也影响了 TOA 的估计精度. 因此, 上述关键参数的估计精度决定了信标信息提取的误码率以及对信标机位置定位的精度.

信息位宽、FOA 和 TOA 估计的 CRB 作为这三者无

偏估计的方差下界, 给出了伽利略搜救信号模型下上述参数估计性能的极限, 可用于评估参数估计算法的性能, 因而对参数估计算法的研究具有非常重要的指导意义^[5,6]. 所以, 在提出上述参数估计算法前有必要研究它们的 CRB.

文献[7]研究了 PSK 信号信息位宽估计的 CRB, 但并没有给出解析结果; 文献[8]虽然给出了解析结果, 但其结论对伽利略搜救信号模型却并不适用. 文献[9,10]推导了 PSK 信号 FOA 估计的 CRB, 文献[11,12]分别研究了蜂窝信号和多载波信号 TOA 估计的 CRB, 但结论都不适用于伽利略搜救信号. 文献[13]研究了伽利略搜救信号 FOA 和 TOA 估计的 CRB, 但没有给出解析结果, 同时该文假设信息位宽已知并且不变, 这与实际情况不符, 因而所得结论并无太多实际意义.

本文考虑信息位宽的不确定度, 对伽利略搜救信号信息位宽、FOA 和 TOA 估计的 CRB 进行了研究. 文章

首先介绍了伽利略搜救信号模型,然后推导了计算 Fisher 信息矩阵各元素的通用公式,并推导得到了伽利略搜救信号 Fisher 信息矩阵各元素的计算表达式.具体计算时,利用单位冲激函数的性质和 Parseval 定理,将单位冲激函数的平方和转换到频域进行计算,得到了信息位宽、FOA 和 TOA 估计的 CRB 的解析结果.最后通过数值分析和 Monte Carlo 仿真结果验证了所得 CRB 的有效性.

2 伽利略搜救信号模型

伽利略搜救信号由纯载波、位帧同步部分和用户信息部分组成,信标信号的结构可参考文献^[4].由于信标信号中载波偏移变化率很小^[4],为了描述简单,忽略载波偏移的变化,那么,接收到的单个基带数字信标信号可表示为

$$\begin{aligned} R(n) &= S(n) + \varepsilon(n) \\ &= A \exp[j2\pi f_d n T_s + j\phi(n, T_b, \tau_0)] \\ &\quad \cdot \Pi\left(\frac{nT_s - \frac{L-88}{2}T_b - \tau_0}{(L+88)T_b}\right) + \varepsilon(n) \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $S(n)$ 为基带纯信号, $\varepsilon(n)$ 为均值为 0、方差为 $2\sigma^2$

的复高斯白噪声, $\Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq t < \frac{T}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ 表示矩形

窗函数, A 为信号幅度, f_d 为包含信标信号频率不精确度和多普勒效应在内的载波偏移, T_s 为采样间隔, T_b 为信息位宽, τ_0 为信标信号第 24 个数据位的结束时刻, L 为不包含位帧同步信息的用户信息序列长度(短信息 $L=88$, 长信息 $L=120$), $\phi(n, T_b, \tau_0)$ 为载波相位调制序列, 可表示为

$$\phi(n, T_b, \tau_0) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{L+24} 1.1 b_k p_{\text{man}}(nT_s + (25-k)T_b - \tau_0), & -24T_b \leq nT_s - \tau_0 < LT_b \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2)$$

式中, $b_k = \pm 1$, 表示第 k 位信息. $p_{\text{man}}(t)$ 为曼彻斯特脉冲, 可表示为

$$p_{\text{man}}(t) = \Pi\left(\frac{t - \frac{1}{4}T_b}{\frac{T_b}{2}}\right) - \Pi\left(\frac{t - \frac{3}{4}T_b}{\frac{T_b}{2}}\right) \quad (3)$$

信标规范中, TOA 为信标信号第 24 个数据位的结束时刻, 即 τ_0 ; FOA 为 TOA 时刻对应的频率. 由于忽略了载波偏移变化率, f_d 即为 FOA.

3 计算 Fisher 信息矩阵各元素的通用公式推导

众所周知, 未知参数估计的 CRB 对应于接收信号

Fisher 信息矩阵逆矩阵对角线上相应的元素, 因此, 欲得到伽利略搜救信号信息位宽、FOA 和 TOA 估计的 CRB, 须先求得伽利略搜救信号的 Fisher 信息矩阵.

对于未知参数为 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q]^T$ 的接收信号, 其 Fisher 信息矩阵可表示为

$$\begin{aligned} [I(\boldsymbol{\theta})]_{ij} &= -E\left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right] \\ &= E\left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\partial \ln p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right], \\ & \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, q \end{aligned} \quad (4)$$

式中, \mathbf{r} 为接收信号序列, $\ln p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta})$ 为未知参数的对数似然函数, q 为未知参数个数, $\boldsymbol{\theta}$ 为未知参数矢量.

式(1)中未知参数有 A, f_d, T_b, τ_0 四个, 如果直接按式(4)求解 Fisher 信息矩阵的各元素, 计算过程十分复杂. 为方便计算, 下面推导计算 Fisher 信息矩阵各元素的通用公式.

不失一般性, 设接收信号为

$$r(n) = s(n) + w(n), \quad n = 0, 1, \dots, P-1 \quad (5)$$

式中, $s(n)$ 为具体形式未知的纯信号, $w(n)$ 为均值为 0、方差为 $2\sigma^2$ 的复高斯白噪声, P 为接收信号序列长度. 那么待估计的未知参数 $\boldsymbol{\theta}$ 的联合概率密度函数可表示为

$$p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{n=0}^{P-1} \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} |r(n) - s(n)|^2\right] \quad (6)$$

对式(6)取自然对数可得

$$\ln p(\mathbf{r}; \boldsymbol{\theta}) = C - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{P-1} \{|r(n) - s(n)|^2\} \quad (7)$$

式中, $C = \sum_{n=0}^{P-1} \ln \frac{1}{2\pi\sigma^2}$, 与未知参数无关.

将式(7)代入式(4)化简可得

$$\begin{aligned} [I(\boldsymbol{\theta})]_{ij} &= \frac{1}{4\sigma^4} E\left\{\frac{\partial\left[\sum_{m=0}^{P-1} |r(m) - s(m)|^2\right]}{\partial \theta_i} \frac{\partial\left[\sum_{k=0}^{P-1} |r(k) - s(k)|^2\right]}{\partial \theta_j}\right\} \\ &= \frac{1}{4\sigma^4} E\left\{\sum_{m=0}^{P-1} \frac{\partial[(r(m) - s(m))(r(m) - s(m))^*]}{\partial \theta_i} \cdot \sum_{k=0}^{P-1} \frac{\partial[(r(k) - s(k))(r(k) - s(k))^*]}{\partial \theta_j}\right\} \end{aligned} \quad (8)$$

将式(8)展开并化简可得

$$\begin{aligned} [I(\boldsymbol{\theta})]_{ij} &= \frac{1}{4\sigma^4} E\left\{\sum_{m=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \left[\frac{\partial s(m)}{\partial \theta_i} w^*(m) + \frac{\partial s^*(m)}{\partial \theta_i} w(m)\right] \cdot \left[\frac{\partial s(k)}{\partial \theta_j} w^*(k) + \frac{\partial s^*(k)}{\partial \theta_j} w(k)\right]\right\} \\ &= \frac{1}{4\sigma^4} E\left\{\sum_{m=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \left[\frac{\partial s(m)}{\partial \theta_i} w^*(m) \frac{\partial s(k)}{\partial \theta_j} w^*(k) + \frac{\partial s(m)}{\partial \theta_i} w^*(m) \left(\frac{\partial s(k)}{\partial \theta_j} w^*(k)\right)^* \right.\right. \\ & \quad \left.\left. + \frac{\partial s^*(m)}{\partial \theta_i} w(m) \left(\frac{\partial s(k)}{\partial \theta_j} w^*(k)\right)^* \right.\right. \\ & \quad \left.\left. + \frac{\partial s^*(m)}{\partial \theta_i} w(m) \frac{\partial s(k)}{\partial \theta_j} w^*(k) \right]\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial s(m)}{\partial \theta_i} w^*(m) \right)^* \frac{\partial s(k)}{\partial \theta_j} w^*(k) \\
& + \left. \left(\frac{\partial s(m)}{\partial \theta_i} w^*(m) \right)^* \left(\frac{\partial s(k)}{\partial \theta_j} w^*(k) \right)^* \right\} \\
= & \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E} \left\{ \sum_{m=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial s^*(m)}{\partial \theta_i} w(m) \right) \right. \\
& \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{\partial s(k)}{\partial \theta_j} w^*(k) \right) \left. \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

θ 将 $\frac{\partial s(m)}{\partial \theta_i}$ 和 $w(m)$ 表示成实部和虚部之和的形式

$$\begin{cases} \frac{\partial s(m)}{\partial \theta_i} = \frac{\partial s_R(m)}{\partial \theta_i} + j \frac{\partial s_I(m)}{\partial \theta_i} \\ w(m) = w_R(m) + j w_I(m) \end{cases} \quad (10)$$

并代入式(9)整理可得

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}(\theta)]_{ij} = & \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E} \left\{ \sum_{m=0}^{P-1} \sum_{k=0}^{P-1} \left[\frac{\partial s_R(m)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_R(k)}{\partial \theta_j} w_R(m) w_R(k) \right. \right. \\
& + \frac{\partial s_R(m)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_I(k)}{\partial \theta_j} w_R(m) w_I(k) \\
& + \frac{\partial s_I(m)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_R(k)}{\partial \theta_j} w_I(m) w_R(k) \\
& \left. \left. + \frac{\partial s_I(m)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_I(k)}{\partial \theta_j} w_I(m) w_I(k) \right] \right\} \quad (11)
\end{aligned}$$

根据复高斯白噪声实部、虚部的相互独立性和噪声方差定义,式(11)可化简为

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}(\theta)]_{ij} = & \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=0}^{P-1} \frac{\partial s_R(n)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_R(n)}{\partial \theta_j} \right\} \sigma^2 + 0 + 0 \\
& + \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=0}^{P-1} \frac{\partial s_I(n)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_I(n)}{\partial \theta_j} \right\} \sigma^2 \\
= & \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=0}^{P-1} \left[\frac{\partial s_R(n)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_R(n)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial s_I(n)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_I(n)}{\partial \theta_j} \right] \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

如果 $i=j$, 所求即为 Fisher 信息矩阵对角线元素, 由式(12)可得

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}(\theta)]_{ii} = & \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=0}^{P-1} \left[\left(\frac{\partial s_R(n)}{\partial \theta_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial s_I(n)}{\partial \theta_i} \right)^2 \right] \right\} \\
= & \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=0}^{P-1} \left| \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_i} \right|^2 \right\} \quad (13)
\end{aligned}$$

上述推导过程中并未对信号形式作具体假设, 因此, 式(12)是 Fisher 信息矩阵各元素的通用计算公式, 适用于任何形式信号。

4 关键参数估计的 CRB 计算

对于伽利略搜救信号模型, 考虑到式(1)中函数 $\Pi(\cdot)$ 的作用是确定信标信号范围, 而以下讨论全部针对信标信号进行, 为方便推导, 将函数 $\Pi(\cdot)$ 去掉, 那么基带纯信号 $S(n)$ 可写作

$$S(n) = A \exp[j2\pi f_d n T_s + j\phi(n, T_b, \tau_0)] \quad (14)$$

为方便表述, 记

$$S(n) = A \exp(j\alpha), \quad (15)$$

$$\alpha = 2\pi f_d n T_s + \phi(n), \phi(n) = \phi(n, T_b, \tau_0)$$

同时将伽利略搜救信号中的未知参数写成矢量形式

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]^T = [A, f_d, T_b, \tau_0]^T \quad (16)$$

假设接收信号中信标信号起始之前和结束之后均为噪声, 那么式(1)可表示为

$$R(n) = \begin{cases} \varepsilon(n), & n = 0, 1, \dots, N_0 - 1 \\ S(n) + \varepsilon(n), & n = N_0, N_0 + 1, \dots, N_0 + M - 1 \\ \varepsilon(n), & n = N_0 + M, N_0 + M + 1, \dots, N - 1 \end{cases} \quad (17)$$

式中, $N_0 = \lceil \frac{\tau_0 - 88 T_b}{T_s} \rceil$ 为信号起始时刻对应的采样点

值, $M = \lceil \frac{(88 + L) T_b}{T_s} \rceil$ 为信号时长对应的采样点数, 且

$M \gg N_0$, N 为接收信号序列长度. 那么, 由式(12)、(17)可得伽利略搜救信号 Fisher 信息矩阵各元素的计算公式为

$$[\mathbf{I}(\theta)]_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left[\frac{\partial s_R(n)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_R(n)}{\partial \theta_j} + \frac{\partial s_I(n)}{\partial \theta_i} \frac{\partial s_I(n)}{\partial \theta_j} \right] \right\}, & i, j = 1, 2, 3, 4, i \neq j \\ \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left| \frac{\partial s(n)}{\partial \theta_i} \right|^2 \right\}, & i, j = 1, 2, 3, 4, i = j \end{cases} \quad (18)$$

将式(16)代入式(18)化简可得伽利略搜救信号 Fisher 信息矩阵为

$$[\mathbf{I}(\theta)] = \begin{bmatrix} [\mathbf{I}(\theta)]_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{I}(\theta)]_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{I}(\theta)]_{33} & [\mathbf{I}(\theta)]_{34} \\ 0 & 0 & [\mathbf{I}(\theta)]_{34} & [\mathbf{I}(\theta)]_{44} \end{bmatrix} \quad (19)$$

由式(19)可知, 频率与信息位宽、时延无关, 信息位宽、FOA 和 TOA 估计的 CRB 分别对应于 $[\mathbf{I}(\theta)]$ 逆矩阵中的 $[[\mathbf{I}(\theta)]^{-1}]_{33}$ 、 $[[\mathbf{I}(\theta)]^{-1}]_{22}$ 和 $[[\mathbf{I}(\theta)]^{-1}]_{44}$, 下面对 $[\mathbf{I}(\theta)]$ 中的对角线元素和非对角线元素分别进行计算。

4.1 对角线元素计算

由式(15)~(18)可得

$$\begin{aligned}
[\mathbf{I}(\theta)]_{22} = & \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left| \frac{\partial s(n)}{\partial f_d} \right|^2 \right\} \\
= & \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left| \frac{\partial (A \exp(j\alpha))}{\partial f_d} \right|^2 \right\} \\
= & (2\pi T_s)^2 \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} |n \exp(j\alpha)|^2 \right\} \\
= & 2(2\pi T_s)^2 \frac{A^2}{2\sigma^2} \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} n^2 \quad (20)
\end{aligned}$$

同理可得

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{33} = \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left(\frac{\partial \phi(n)}{\partial T_b} \right)^2 \right\} \quad (21)$$

为计算式(21),先计算 $\mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left(\frac{\partial \phi(n)}{\partial T_b} \right)^2 \right\}$.

将式(3)表示成阶跃函数之差的形式

$$p_{\text{man}}(t) = u(t) - 2u\left(t - \frac{T_b}{2}\right) + u(t - T_b) \quad (22)$$

式中, $u(t - \tau) = \begin{cases} 1, & t \geq \tau \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 为单位阶跃函数.

对式(22)关于 T_b 求偏导可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\text{man}}(t)}{\partial T_b} &= \delta(t) \frac{\partial t}{\partial T_b} - 2\delta\left(t - \frac{T_b}{2}\right) \frac{\partial\left(t - \frac{T_b}{2}\right)}{\partial T_b} \\ &\quad + \delta(t - T_b) \frac{\partial(t - T_b)}{\partial T_b} \end{aligned} \quad (23)$$

式中, $\delta(t)$ 为单位冲激函数, 且具有如下性质

$$\delta(t - \tau) = 0, \quad t \neq \tau \quad (24)$$

$$\delta(t - \tau_1)\delta(t - \tau_2) = \begin{cases} \delta^2(t - \tau_1), & \tau_1 = \tau_2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (25)$$

令 $\lambda = nT_s + (25 - k)T_b - \tau_0$, 由式(23)可得式(2)关于 T_b 的偏导为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(n)}{\partial T_b} &= \frac{\partial \left\{ \sum_{k=1}^{L+24} 1.1 b_k p_{\text{man}}(\lambda) \right\}}{\partial T_b} \\ &= 1.1 \sum_{k=1}^{L+24} b_k \left\{ \left[(25 - k)\delta(\lambda) - 2(24.5 - k)\delta\left(\lambda - \frac{T_b}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (24 - k)\delta(\lambda - T_b) \right] \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

将式(26)代入 $\mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left(\frac{\partial \phi(n)}{\partial T_b} \right)^2 \right\}$, 利用式(25)化简并考虑 $b_k^2 = 1$ 可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left(\frac{\partial \phi(n)}{\partial T_b} \right)^2 \right\} &= 1.1^2 \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=1}^{L+24} \left[\sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} (25 - k)^2 \delta^2(\lambda) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4(24.5 - k)^2 \delta^2\left(\lambda - \frac{T_b}{2}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (24 - k)^2 \delta^2(\lambda - T_b) \right] \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

下面计算 $\mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \delta^2(\lambda) \right\}$.

根据式(24)和 Parseval 定理可得

$$\int_{-\tau}^{\tau} \delta^2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2(t - \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{\delta}(f)|^2 df \quad (28)$$

式中, $S_{\delta}(f)$ 为 $\delta(t - \tau)$ 的频谱, 可表示为 $S_{\delta}(f) = e^{-j2\pi f\tau}$.

由式(28)可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \delta^2(\lambda) \right\} &= \frac{1}{T_s} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \delta^2(\lambda) \cdot T_s \right\} \\ &= \frac{1}{T_s} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \delta^2(0) \cdot T_s \right\} \\ &\approx \frac{1}{T_s} \int_{\lambda=0}^{\lambda=0} \delta^2(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} |S_{\delta}(f)|^2 df \end{aligned} \quad (29)$$

上式成立的条件是 $\lambda = nT_s + (25 - k)T_b - \tau_0 = 0$ 成立. 理想信标信号中 $\tau_0 = 88T_b + t_0$, $T_b = 2.5\text{ms}$, t_0 为整毫秒, $1 \leq k \leq L + 24$, 经计算, 合理地选取采样间隔 T_s , 使 $\frac{1}{T_s}$ 为 2kHz 的整倍数, 即可保证 $n = \frac{\tau_0 - (25 - k)T_b}{T_s}$ 为正整数, 此时 $\lambda = nT_s + (25 - k)T_b - \tau_0 = 0$.

由于相位编码信号的带宽是编码后信号码速率的 2 倍^[14], 码速率为 $\frac{1}{T_b}$ (信息位宽为 T_b) 的基带信号, 经过曼彻斯特编码后码速率为 $\frac{2}{T_b}$, 此时信号带宽为 $\frac{4}{T_b}$. 那么, 式(29)进一步化简可得

$$\mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \delta^2(\lambda) \right\} \approx \frac{1}{T_s} \int_{\frac{4}{T_b}} |S_{\delta}(f)|^2 df = \frac{4}{T_s T_b} \quad (30)$$

同理, 使 $\frac{1}{T_s}$ 为 4kHz 的整倍数, 即可保证式(27)中 $\lambda - \frac{T_b}{2} = 0$ 和 $\lambda - T_b = 0$ 成立. 那么, 由式(30)可得

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left(\frac{\partial \phi(n)}{\partial T_b} \right)^2 \right\} &= \frac{4.84}{T_s T_b} \sum_{k=1}^{L+24} \left[(25 - k)^2 + 4(24.5 - k)^2 \right. \\ &\quad \left. + (24 - k)^2 \right] \end{aligned} \quad (31)$$

将式(31)代入式(21)可得

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{33} &= \frac{9.68 A^2}{T_s T_b 2\sigma^2} \sum_{k=1}^{L+24} \left\{ (25 - k)^2 + 4(24.5 - k)^2 + (24 - k)^2 \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

类似地

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{44} = \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left(\frac{\partial \phi(n)}{\partial \tau_0} \right)^2 \right\} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(n)}{\partial \tau_0} &= \frac{\partial \left\{ \sum_{k=1}^{L+24} 1.1 b_k p_{\text{man}}(\lambda) \right\}}{\partial \tau_0} \\ &= 1.1 \sum_{k=1}^{L+24} b_k \left\{ \left[-\delta(\lambda) + 2\delta\left(\lambda - \frac{T_b}{2}\right) - \delta(\lambda - T_b) \right] \right\} \end{aligned} \quad (34)$$

将式(34)代入式(33), 利用式(25)化简并考虑 $b_k^2 = 1$ 可得

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{44} = 1.1^2 \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{k=1}^{L+24} \left[\sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \delta^2(\lambda) + 4\delta^2 \left(\lambda - \frac{T_b}{2} \right) + \delta^2(\lambda - T_b) \right] \right\} \quad (35)$$

按 $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{33}$ 的求解过程可求得

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{44} \approx \frac{9.68}{T_s T_b} \frac{A^2}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{L+24} 6 = \frac{58.08}{T_s T_b} \frac{A^2}{2\sigma^2} (L+24) \quad (36)$$

4.2 非对角线元素计算

由式(15)~(18)可得

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{34} &= \frac{1}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \left[\frac{\partial s_R(n)}{\partial T_b} \frac{\partial s_R(n)}{\partial \tau_0} + \frac{\partial s_I(n)}{\partial T_b} \frac{\partial s_I(n)}{\partial \tau_0} \right] \right\} \\ &= \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \frac{\partial \phi(n)}{\partial T_b} \frac{\partial \phi(n)}{\partial \tau_0} \right\} \\ &= \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \frac{\partial \phi(n)}{\partial T_b} \frac{\partial \phi(n)}{\partial \tau_0} \right\} \end{aligned} \quad (37)$$

将式(26)、(34)代入式(37),利用式(25)化简并考虑 $b_k^2 = 1$ 可得

$$[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{34} = 1.1^2 \frac{A^2}{\sigma^2} \mathbb{E} \left\{ \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} \sum_{k=1}^{L+24} \left[(k-25)\delta^2(\lambda) + 4(k-24.5)\delta^2 \left(\lambda - \frac{T_b}{2} \right) + (k-24)\delta^2(\lambda - T_b) \right] \right\} \quad (38)$$

按 $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{33}$ 、 $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{44}$ 求解过程可求得

$$\begin{aligned} [\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{34} &= \frac{4.84}{T_s T_b} \frac{A^2}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{L+24} \{ (k-25) + 4(k-24.5) + (k-24) \} \\ &= \frac{9.68}{T_s T_b} \frac{A^2}{2\sigma^2} (L+24)(3L-72) \end{aligned} \quad (39)$$

将以上 Fisher 信息矩阵元素各计算结果代入式(19),并对矩阵 $[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]$ 求逆可得

$$\text{var}(\hat{f}_d) \geq [[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}]_{22} = \frac{1}{[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{22}} = \frac{1}{2(2\pi T_s)^2 \text{SNR} \sum_{n=N_0}^{N_0+M-1} n^2} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{T}_b) &\geq [[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}]_{33} = \frac{[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{44}}{[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{33}[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{44} - ([\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{34})^2} \\ &= \frac{T_s T_b}{\text{SNR}} \frac{1}{4.84(L+24)^3} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \text{var}(\hat{\tau}_0) &\geq [[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]^{-1}]_{44} = \frac{[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{33}}{[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{33}[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{44} - ([\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{34})^2} \\ &= \frac{T_s T_b}{\text{SNR}} \frac{L^2 - 24L + 24^2}{14.52(L+24)^3} \end{aligned} \quad (42)$$

式中, $\text{SNR} = \frac{A^2}{2\sigma^2}$, 表示实际信号的信噪比。

若不考虑信息位宽的不确定度,由式(19)可得

$$\text{var}(\hat{\tau}_0) \geq \frac{1}{[\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})]_{44}} = \frac{T_s T_b}{\text{SNR}} \frac{1}{58.08(L+24)} \quad (43)$$

与式(42)比较,二者之比为 $\frac{(L+24)^2}{4(L^2-24L+24^2)}$ 。由此可见,考虑信息位宽的不确定度后 TOA 估计的 CRB 有较大变化,说明信息位宽的不确定度对 TOA 的估计有较大影响,因此在提出算法时应予以考虑。

5 数值分析与仿真验证

为验证信息位宽、FOA 和 TOA 估计的 CRB 的有效性,对式(40)~(42)进行数值计算,同时采用文献[15]提出的多维联合极大似然估计算法和体积重心算法相结合的参数估计算法进行 Monte Carlo 仿真,将仿真结果与数值计算结果进行比较。由于极大似然估计具有渐进无偏特性,估计量在高信噪比时可以达到 CRB,因此,如果高信噪比时仿真得到的信息位宽、FOA 和 TOA 的估计方差与理论计算的 CRB 一致,则表明本文推导的 CRB 是有效的。

对于长格式信标信号, $L = 120$, 经前端处理后^[16], 基带信号采样率为 200kHz, 即 $T_s = 5\mu\text{s}$ 。载噪比为 34.8dBHz 的处理门限时,实际信噪比约为 0dB。信息位宽 T_b 取理想值 2.5ms, 假设信号起始前有 20ms 噪声, 即 $N_0 = 4000$, 根据式(40)~(42)可计算出不同信噪比下 FOA 和 TOA 估计的 CRB。

进行 Monte Carlo 仿真时信号采样率也设定为 200kHz, 用户信息固定, 生成信息位宽为 2.5ms 的长格式基带信标信号, 然后根据载噪比叠加零均值复高斯白噪声, 信号起始前纯噪声也为 20ms。对生成的信号用带宽为 2.6kHz 的低通滤波器滤波后采用多维联合极大似然估计算法, 对接收信号进行频率、信息位宽和时延三维搜索, 以获得 FOA、信息位宽和 TOA 的估计。其中, 单侧频率搜索范围 0.6Hz, 步进 0.02Hz; 单侧信息位宽搜索范围 $4\mu\text{s}$, 步进 0.25 μs ; 单侧时延搜索范围 500 μs , 搜索步进 5 μs 。同时选择合适的门限, 采用体积重心算法以减小各维参数估计误差。将不同载噪比下 10000 次 Monte Carlo 仿真得到的信息位宽、FOA 和 TOA 估计的标准差与理论计算的 CRB 的平方根进行比较, 结果分别如图 1~图 3 所示。

从图 1~图 3 可以看出, 在低信噪比下, 由于噪声的影响, 信息位宽、FOA 和 TOA 的估计方差与理论计算的 CRB 有一定差别。随着信噪比的提高, 上述参数的估计方差逐渐趋近于理论计算的 CRB, 当信噪比达到 20dB 时, 估计方差与理论计算的 CRB 基本一致, 说明本文给出的信息位宽、FOA 和 TOA 估计的 CRB 是有效的, 可以用于评估上述参数估计算法的性能。

图 3 中, 若不考虑信息位宽的不确定度, TOA 估计的 CRB 明显小于考虑信息位宽不确定度后 TOA 估计的 CRB, 这说明信息位宽对 TOA 的估计有较大影响, 在进

行 TOA 估计时须考虑这一影响。

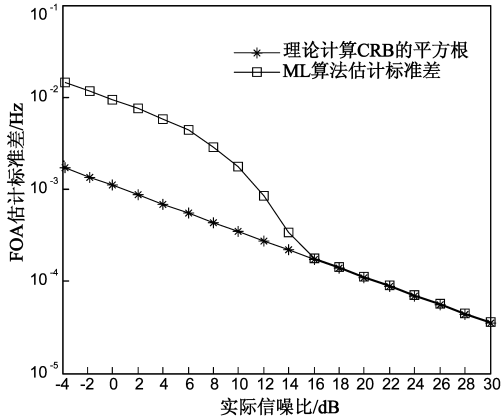


图1 信息位宽估计标准差与理论计算的CRB

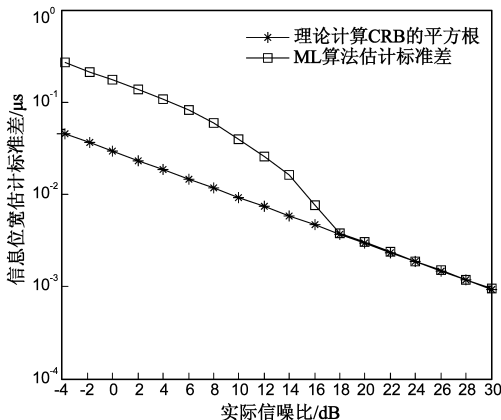


图2 FOA估计标准差与理论计算的CRB

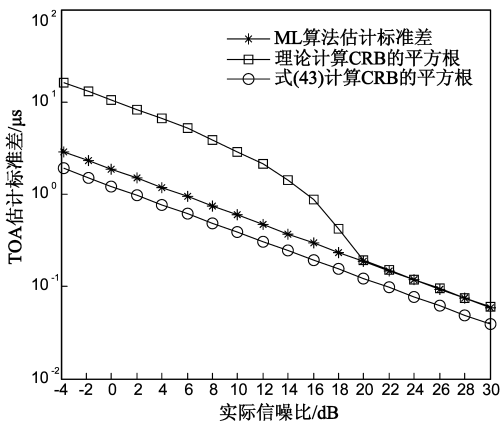


图3 TOA估计标准差与理论计算的CRB

6 结论

本文考虑信息位宽的不确定度,对伽利略搜救信号信息位宽、FOA 和 TOA 估计的 CRB 进行了研究,并得到了 CRB 的解析结果.数值分析和仿真验证结果表明,本文得到的 CRB 具有有效性,可以用于评估上述参数估计算法的性能,对估计算法的研究具有较强的指导意义.同时,也证明了本文推导的计算 Fisher 信息矩阵各元素的通用公式的正确性.该公式具有通用性和可

扩展性,可用于其他形式信号参数估计的 CRB 的研究.

参考文献

- [1] 林墨,刘绍波,尚丽娜,等.伽利略卫星导航系统搜索与救援服务中国区性能分析[J].遥测遥控,2009,30(3):2-4. Lin Mo, Liu Shao-bo, Shang Li-na, et al. Performance analysis of the GALILEO system search and rescue service in China [J]. Journal of Telemetry, Tracking and Command, 2009, 30(3):2-4. (in Chinese)
- [2] C F Prades. Advanced Signal Processing Techniques for Global Navigation Satellite Systems Receivers [D]. Barcelona, Spain: Universitat Politcnica de Catalunya, 2005.
- [3] 董智红,杨娜,崔巍,等.伽利略搜救信号解调解码算法设计[J].仪器仪表学报,2010,31(8):357-361. Dong Zhi-hong, Yang Na, Cui Wei, et al. Design of modulation-decoding algorithm in Galileo SAR system [J]. Chinese Journal of Science Instrument, 2010, 31(8):357-361. (in Chinese)
- [4] Cospas-Sarsat Council. Specification for Cospas-Sarsat 406MHz distress beacons. Tech [EB/OL]. <http://www.cospas-sarsat.org/Documents/tDocs.htm>, 2007-11.
- [5] 邵朝,卢光跃.交替分离算法的 Cramer-Rao 界[J].电子与信息学报,2006,29(3):582-584. Shao Chao, Lu Guang-yue. Alternating separation algorithm and its Cramer-Rao bound [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2006, 29(3):582-584. (in Chinese)
- [6] Li Zi, Cai Yue-ming. Cramer-Rao bound for blind channel estimation in complex-valued channel [J]. Journal of Electronics (China), 2006, 23(6):197-199.
- [7] C W Yik, E Serpedin. Design and analysis of feed forward symbol timing estimators based on the conditional maximum likelihood principle [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2005, 53(5):1908-1918.
- [8] J P Delmas. Closed-form expressions of the exact Cramer-Rao bound for parameter estimation of BPSK, MSK, or QPSK waveforms [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2008, 15:405-408.
- [9] H Steendam, M Moeneclaey. Low-SNR limit of the Cramer-Rao bound for estimating the carrier phase and frequency of a PAM, PSK, or QAM waveform [J]. IEEE Communications Letters, 2001, 5(5):218-220.
- [10] N Noels, H Steendam, M Moeneclaey. The true Cramer-Rao bound for carrier frequency estimation from a PSK signal [J]. IEEE Transactions on Communications, 2004, 52(5):834-844.
- [11] H Koorapaty. Cramer-Rao bounds for time of arrival estimation in Cellular systems [A]. IEEE 59th Vehicular Technology Conference [C]. Milan, Italy: IEEE Press, 2004. 2729-2733.
- [12] F Zanier, M Luise. Fundamental issues in time-delay estima-

tion of multicarrier signals with applications to next-generation GNSS[A]. IEEE 10th International Workshop on Signal Processing for Space Communications [C]. Rhodes Island, Greece: IEEE Press, 2008. 1 – 8.

- [13] C F Prades, P C Gomez, J A F Rubio. Time-frequency estimation in the Cospas-Sarsat system using antenna arrays: variance bounds and algorithms [A]. The 13th European Signal Processing Conference [C]. Antalya, Turkey: Curran Associates, Inc, 2005. 1 – 4.
- [14] 邓振森, 刘渝. 相位编码信号码元宽度估计的修正克拉美—罗界[J]. 通信学报, 2009, 30(9): 117 – 121.
Deng Zhen-miao, Liu Yu. Modified Cramer-Rao lower bound for symbol width estimation from a phase-shift-keying signal [J]. Journal on Communications, 2009, 30(9): 117 – 121. (in Chinese)
- [15] 董智红, 王堃, 魏子翔, 等. 伽利略搜救信号联合精估算法设计[J]. 仪器仪表学报, 2010, 31(8): 362 – 367.
Dong Zhi-hong, Wang Kun, Wei Zi-xiang, et al. Design of a joint estimation algorithm of FOA and TOA in Galileo SAR system[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2010, 31(8): 362 – 367. (in Chinese)
- [16] 董智红, 王剑, 王堃, 等. 伽利略搜救信号检测算法[J]. 北京理工大学学报, 2010, 30(8): 969 – 973.
Dong Zhi-hong, Wang Jian, Wang Kun, et al. Design of signal detection methods in Galileo SAR system[J]. Transaction of Beijing Institute of Technology, 2010, 30(8): 969 – 973. (in Chinese)

作者简介



王 堃 男, 1985 年生于湖北潜江. 北京理工大学信息与电子学院博士研究生. 研究方向为伽利略搜救信号处理算法研究.
E-mail: liuyishou@bit.edu.cn



吴嗣亮 男, 1964 年生于安徽绩溪. 1995 年毕业于哈尔滨工业大学无线电工程系. 现任北京理工大学教授, 博士生导师. 研究方向为雷达系统理论与技术、现代信号处理理论与应用、扩频信号处理理论与技术及其在无线电测控与卫星导航定位中的应用等.
E-mail: siliangw@bit.edu.cn



田 静 女, 1984 年生于山东临沂, 北京理工大学信息与电子学院博士研究生. 研究方向为雷达信号检测与跟踪技术研究.
E-mail: 10905046@bit.edu.cn